Optimisation dans un Hilbert

Leçon : 213, 219, 203, 205, 253, 229

Réf : Ciarlet, (poly Karine), (Ine-Pec).

Théorème

Soient H un espace de Hilbert réel et $J : H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue et coercive. Alors il existe $a \in H$ tq

$$J(a) = \inf_{x \in H} J(x).$$

Preuve

- Étape 1 : une suite minimisante

Soit $(x_k)_k$ une suite de H tq $J(x_k) \to \inf_H J$.

Mq $(x_k)_k$ est bornée. Par l'absurde, si ce n'est pas le cas, alors il existerait une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $\|x_{\varphi(k)}\| \to +\infty$.

Ainsi, par coercivité de J, on aurait $J(x_{\varphi(k)}) \to +\infty$, ce qui est impossible car $J(x_{\varphi(k)}) \to \inf_H J$.

- Étape 2 : extraction diagonale

On considère la suite $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}} := (\langle x_0, x_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$.

Par l'inégalité de CS, $\forall k \in \mathbb{N}$ $|u_k| = |\langle x_0, x_k \rangle| \leq \|x_0\| \cdot \|x_k\|$ donc u est bornée. Par Bolzano-Weierstrass, il existe une extract° φ_0 tq $(u_{\varphi_0(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge.

Par récurrence, supposons avoir construit des extractions φ_i tq $(\langle x_i, x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i(k)} \rangle)_k$ converge.

Comme précédemment, la suite $(\langle x_{i+1}, x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i(k)} \rangle)$ est bornée, donc il existe une extraction $\varphi_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq la suite $(\langle x_{i+1}, x_{\varphi_0 \circ \dots \varphi_0 \circ \varphi_{i+1}(k)} \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ converge.

On définit alors une suite d'extract° $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

On pose $\left| \begin{array}{l} \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ k \mapsto \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_k (k) \end{array} \right.$

Donc la suite $(\langle x_i, x_{\psi(k)} \rangle)_k$ CV pour tout i car $(\psi(k))_{k \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de de $(\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i (k))_{k \in \mathbb{N}}$.

Donc, par linéarité, si $F := \mathrm{Vect}(x_p, p \in \mathbb{N})$, alors pour tout $v \in F$, $(\langle v, x_{\psi(k)} \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ converge. On note $y_k = x_{\psi(k)}$.

- <u>Étape 3</u> : convergence de $(\langle u, y_k \rangle)_k$ $\forall u \in H$.

Par le TSO, on a $H = \overline{F} \oplus F^\perp$. Soit $u \in H$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $v \in \overline{F}, w \in F^\perp$ tq $u = v + w$ et il existe $\tilde{v} \in F$ tq $\|v - \tilde{v}\| \leq \varepsilon$.

On veut mq $(\langle u, y_k \rangle)_k$ CV. Montrons qu'elle est de CY.
Soit k, l deux entiers. Alors on a

$$|\langle u, y_k - y_l \rangle| \underset{w \in F^\perp}{=} |\langle v, y_k - y_l \rangle| \leq \underbrace{\|v - \tilde{v}\|}_{\leq \varepsilon} \cdot \|y_k - y_l\| + \langle \tilde{v}, y_k - y_l \rangle$$

et $(\langle \tilde{v}, y_k \rangle)_k$ CV donc est de CY.

Donc $(\langle u, y_k \rangle)_k$ CY donc CV vers une limite $l_u \in \mathbb{R}$ (détailler si besoin)

On pose $\left| \begin{array}{l} \varphi : H \to \mathbb{R} \\ u \mapsto l_u \end{array} \right.$. Alors φ est linéaire et est bien définie par unicité de la limite.

De plus $(x_k)_k$ est bornée, donc si $C \geq \|x_k\|$ $\forall k \in \mathbb{N}$, alors par CS, $|\varphi(u)| = |\lim_{k\to+\infty} \langle u, x_{\psi(k)} \rangle|$

$$= \lim_{k\to+\infty} \underbrace{|\langle u, x_{\psi(k)} \rangle|}_{\leq \|u\| \|x_{\psi(k)}\| \leq \|u\| C}$$

$$\leq C\|u\|.$$

Donc φ est continue. Par le théorème de Riesz, il existe $a \in H$, unique, tq $\forall u \in H$ $\varphi(u) = \langle u, a \rangle$.

Donc $\forall u \in H$, $\langle u, y_k \rangle = \langle u, x_{\psi(k)} \rangle \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \langle u, a \rangle$.

· Étape 4 : $J(a) = \inf_H J$.

Soit $\beta > \inf_H J$. On pose $C_\beta = \{x \in H : J(x) \leq \beta\}$.

Alors C_β est :

- non vide, car $\beta > \inf_H J$
- fermé car J continue
- convexe car J convexe : $\lambda \in [0,1]$, $x, y \in C_\beta$.

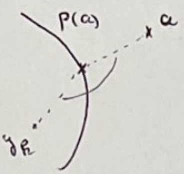
$$J(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda J(x) + (1-\lambda) J(y)$$
$$\leq \lambda \beta + (1-\lambda)\beta = \beta.$$

Ainsi, par le théorème de project°, la distance de $x \in H$ à C_β est atteinte en un unique point $P(x)$, $P : H \to C_\beta$.

$J(x_k) \to \inf_H J$, donc $J(y_k) \to \inf_H J$ aussi.

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \geq N$, $y_k \in C_\beta$.
Par la caractérisat° de l'angle obtus, on a pour $k \geq N$

$$\langle a - p(a), y_k - p(a) \rangle \leq 0.$$



Or $\langle y_k, a - p(a) \rangle \xrightarrow[k \to +\infty]{} \langle a - p(a), a \rangle$.

Donc
$$\|a - p(a)\|^2 = \langle a - p(a), a - p(a) \rangle$$
$$= \lim_{k \to +\infty} \langle a - p(a), y_k - p(a) \rangle \leq 0$$
$$\leq 0$$

Donc $a = p(a)$ et $a \in C_\beta$. Ainsi $J(a) \leq \beta$ $\forall \beta \in \mathbb{R}$ tq $\beta > \operatorname{Inf}_H J$, donc
$$\boxed{J(a) = \operatorname{Inf}_H J}$$

$\square$

Application (Brezis)

Résoudre $\begin{cases} -u''+u=f, \ I=]0,1[, \ f\in L^2(I). \\ u(0)=u(1)=0. \end{cases}$

faiblement : $\forall v \in H_0^1(I), \int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv.$

Lax-Milgram avec $a(u,v)=\int u'v' + \int uv$, $\varphi(v)=\int fv$

$\rightarrow \exists !$ solution $u\in H_0^1$.

elle est donnée par $\min\limits_{v\in H_0^1} \{ \frac{1}{2}\int_I (v'^2+v^2) - \int_I fv \}.$

On pose $\begin{array}{|l} J: H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R} \\ \quad v \longmapsto \frac{1}{2}\int_I (v'^2+v^2) - \int_I fv \end{array}$

On applique le théorème ci-dessus.

- J continue :

$|J(v)| \leq \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^1(I)} + \|f\|_{L^2(I)}\|v\|_{L^2(I)} \leq \left(\frac{1}{2}+\|f\|_{L^2(I)}\right)\|v\|_{H_0^1(I)}$.

(les 2 termes sont C^0).

- J coercive :

$|\int_I fv| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H_0^1(I)}$, donc

$J(v) \geq \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^1(I)} - \|f\|_{L^2(I)}\|v\|_{H_0^1(I)} \rightarrow +\infty.$

- J convexe :

$J\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2_{H_0^1(I)} - \int_I f\,\frac{u+v}{2}$

$= \cdots = \frac{J(u)+J(v)}{2} - \frac{1}{8}\|u-v\|^2_{H_0^1(I)}$ (strictement convexe)